



I. $z = [1, \alpha] = \cos \alpha + i \sin \alpha$ Approche sur l'ensemble des nombres complexes :

a. Activité :

1. On considère l'équation $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$.

Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Qui impose au mathématicien d'utiliser le nombre i qui n'est pas réel mais c'est un nombre imaginaire tel que : $i^2 = (-i)^2 = -1$ par suite l'équation admet 2 solutions i et $-i$ mais dans un autre ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$ et qui ont mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation : (E) : $x^2 - 2x + 2 = 0$.

- Vérifie que l'équation (E) s'écrit de la forme suivante : (E) : $(x-1)^2 + 1 = 0$.
- Vérifie que $1+i$ et $1-i$ sont solutions de (E).

b. Vocabulaire et notation :

- Les nombres $1+i$ et $1-i$ sont appelés nombres complexes.
- En général : un nombre complexe est écrit de la forme $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Le nombre complexe : $z' = a - bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelé le nombre complexe conjugué de z noté $\bar{z}$ d'où $\bar{z} = a - bi$

Exemple : $z = 2 + 5i$ et $z' = -7 - 3i \Rightarrow \bar{z} = \overline{2 + 5i} = 2 - 5i$ et $\bar{z}' = \overline{-7 - 3i} = -7 + 3i$

- L'écriture $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelée l'écriture (ou la forme) algébrique de z .
- Le réel a est appelé la partie réelle et on note $\operatorname{Re}(z) = a$. Exemple : $\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2$.
- Le réel b est appelé la partie imaginaire et on note $\operatorname{Im}(z) = b$. Exemple : $\operatorname{Im}(2 + 3i) = 3$.

c. Définition :

- Un nombre complexe est un nombre tel que son écriture est de la forme $z = a + bi$ avec a et b de $\mathbb{R}$, i est un nombre imaginaire avec $i^2 = -1$.
- Les nombres complexes constituent un ensemble est appelé ensemble des nombres complexes, on note $\mathbb{C}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$ et qui ont mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (commutativité – associativité).
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$.

II. Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

a. Opérations :

$z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de $\mathbb{C}$ avec x et y et x' et y' de $\mathbb{R}$. on a :

- ❖ **Addition dans $\mathbb{C}$** : $z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$. $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$
- ❖ **Multiplication dans $\mathbb{C}$** : $z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$.
- cas particulier** $k \in \mathbb{R}$: $k.z = k.(x + yi) = kx + kyi$.



❖ **L'inverse de** $z = a + bi \neq 0 ((a, b) \neq (0, 0))$: $\frac{1}{z'} = \frac{1}{x' + y'i} = \frac{1 \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}} = \frac{1 \times (x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2} i$

❖ **Le quotient de z par z'** : $\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}} = \frac{1}{z' \times \overline{z'}} \times z \times \overline{z'}$

$$= \frac{1}{x'^2 + y'^2} \times (x + yi)(x' - y'i) = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} i$$

b. Applications :

- ❖ $z + z' = 1 + 5i + 2 - 3i = 3 + 2i$.
- ❖ $z \times z' = (1 + 5i) \times (2 - 3i)$
 $= 1 \times 2 + 5i \times (-3i) + (1 \times (-3) + 5 \times 2)i$
 $= 17 + 7i$
- ❖ $-3 \times z = -3 \times (1 + 5i) = -3 - 15i$ **et** $(2 + 3i) \times \overline{(2 + 3i)} = 2^2 + 3^2 = 13$.
- ❖ $\frac{1}{z'} = \frac{1}{2 - 3i}$
 $= \frac{2 + 3i}{(2 - 3i) \times (2 + 3i)}$
 $= \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2} i$
 $= \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$
- ❖ $\frac{z}{z'} = \frac{1 + 5i}{2 - 3i}$
 $= \frac{(1 + 5i)(2 + 3i)}{(2 - 3i) \times (2 + 3i)}$
 $= \frac{1 \times 2 + 5i \times 3i}{2^2 + 3^2} + \frac{5i \times 2 + 1 \times 3i}{2^2 + 3^2}$
 $= \frac{-13}{13} + \frac{13}{13} i$
 $= -1 + i$
- ❖ $z_1 = 2 + 5i - (-4 + 2i) = 2 + 4 + (5 - 2)i = 6 + 3i$
- ❖ $z_2 = 2 + 5i - 3i(-4 + 2i) = 2 + 5i + 12i + 6 = 8 + 17i$.
- ❖ $z_3 = (2 + 5i)(-4 + 2i) = 2 \times (-4) + 5i \times 2i + (2 \times 2 + 5 \times (-4))i = -18 - 16i$.
- ❖ $z_4 = \frac{1}{1 + 3i} = \frac{1 \times (1 - 3i)}{(1 + 3i) \times (1 - 3i)} = \frac{1 - 3i}{1^2 + 3^2} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10} i$.



$$z_5 = \frac{2+3i}{5-i} = \frac{(2+3i) \times (5+i)}{(5-i) \times (5+i)} = \frac{10-3+(2+15)i}{5^2+1^2} = \frac{7+17i}{26} = \frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

c. Remarque :

$$\diamond (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

$$\diamond (a-bi)^2 = a^2 - 2abi + (-bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2.$$

$$\diamond (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

III. Présentation géométrique d'un nombre complexe :

a. Activité :

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

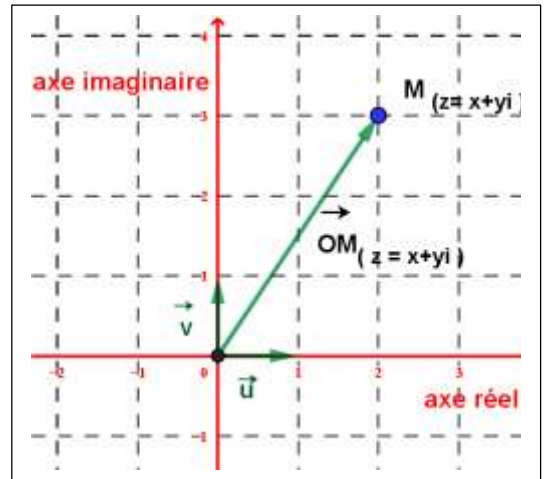
- A tout nombre complexe $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ on lui associe le point $M(x, y)$ de (P) càd :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow (P)$$

$$z = x + yi \mapsto f(z) = f(x + yi) = M(x, y) \text{ (ou bien } \overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v})$$

❖ Dans ce cas :

- Le plan (P) est appelé le plan complexe.
- le point $M(x, y)$ est l'image du complexe $z = x + yi$.
- on note $M_{(z)}$ ou $M_{(x+yi)}$ on lit le point M d'affixe z.
- de même pour le vecteur $\overrightarrow{OM_{(z)}}$.
- on note aussi z_M on lit z est l'affixe de M. de même pour $z_{\overrightarrow{OM}}$.
- Si $z = a \in \mathbb{R}$ alors M est sur l'axe des abscisses sera nommé axe réel.
- Si $z = bi$, ($b \in \mathbb{R}$) alors M est sur l'axe des ordonnées sera nommé axe imaginaire.



b. Propriétés des affixes :

$A(z_A)$; $B(z_B)$; $C(z_C)$ et $I(z_I)$ sont trois points du plan complexe (P).

$$\diamond \text{ Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a pour affixe } z_B - z_A.$$

$$\diamond \text{ Le vecteur } k\overrightarrow{AB} \text{ a pour affixe } k(z_B - z_A).$$

$$\diamond \text{ Le point } I \text{ milieu de } [A, B] \text{ a pour affixe } z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

$$\diamond \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}; (k \in \mathbb{R}) \text{ càd } z_C - z_A = k(z_B - z_A) \text{ ou bien } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R} \text{ d'où les points A et B et C sont alignés (avec } z_B - z_A \neq 0)$$

c. Application :



On considère $C(z_C = 5 + xi)$; $B(z_B = -2 + i)$; $A(z_A = 2 + i)$ et $I(z_I)$ quatre points du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer $z_{\overline{AB}}$ l'afixe du vecteur $\overline{AB}$.
2. Déterminer z_I affixe du point I milieu du segment $[AB]$.
3. Déterminer k tel que A et B et C sont alignés.

Correction :

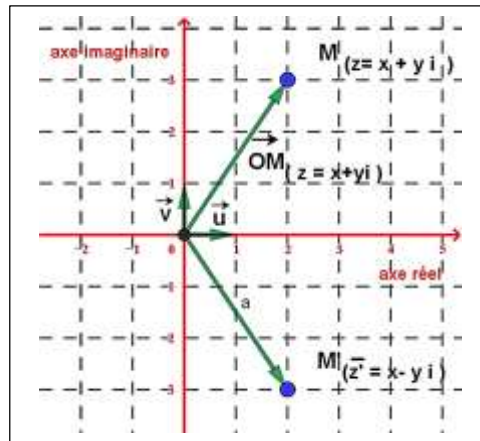
1. ..
2. ..
3. ..

IV. Conjugué d'un nombre complexe $z = x + yi$:

a. Définition :

Le nombre complexe $z' = x - yi$ est appelé le **conjugué du nombre complexe** $z = x + yi$ on note $z' = \bar{z} = x - yi$.

b. Interprétation géométrique :



c. Applications :

- ❖ $z = 1 + 5i$ on a : $\bar{z} = \overline{1 + 5i} = 1 - 5i$.
- ❖ $z = -1 - 3i$ on a : $\bar{z} = \overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$.
- ❖ $z = 1$ on a : $\bar{z} = \overline{1} = 1$.
- ❖ $z = 2i$ on a : $\bar{z} = \overline{2i} = -2i$.
- ❖ $z = -6i$ on a : $\bar{z} = \overline{-6i} = 6i$.

d. Propriétés :

Soient : $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de complexes de $\mathbb{C}$ avec x, y, x' et y' de $\mathbb{R}$ on a :

- $z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2yi = 2\text{Im}(z)i$.
- $\bar{\bar{z}} = z$ et $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ et $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$



• $(z' \neq 0)$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{z^p} = (\overline{z})^p$; $p \in \mathbb{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $p \in \mathbb{Z}^-$).

e. Application :

- ❖ $\overline{2+3i} = 2-3i$.
- ❖ $\overline{(2+3i)+1-2i} = \overline{2+3i} + \overline{1-2i} = 2-3i + 1+2i = 3-i$.
- ❖ $\overline{(2+3i) \times (1-5i)} = \overline{2+3i} \times \overline{1-5i} = (2-3i)(1+5i)$.
- ❖ $\overline{\left(\frac{1}{1-5i}\right)} = \frac{1}{\overline{1-5i}} = \frac{1}{1+5i}$.
- ❖ $\overline{\left(\frac{2+3i}{1-5i}\right)} = \frac{\overline{2+3i}}{\overline{1-5i}} = \frac{2-3i}{1+5i}$.
- ❖ $\overline{(2+3i)^n} = (2-3i)^n$.

f. Remarque :

- ❖ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ (c.à.d. z est un réel pur) .
- ❖ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$ (c.à.d. z est un imaginaire pur) .

V. Module d'un nombre complexe $z = x + yi$:

a. Activité :

$M_{(z=x+yi)}$ est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer : $z \times \overline{z}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculer : $\|\overrightarrow{OM}\|$, que peut-on déduire ?

b. Définition :

Soit $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ avec x et y de $\mathbb{R}$.

Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le **module** de z sera noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c. Application :

- ❖ $|5| = |5+0i| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$ et $|-7| = |-7+0i| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$.
- ❖ $|2i| = |0+2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$ et $|-2i| = |0-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$.
- ❖ $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

d. Interprétation géométrique du module de z :

On a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\overrightarrow{OM}\|$ avec M d'affixe $z = x + yi$. D'où : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$.



e. Remarque :

Soient $z_A = x_A + y_A i$ et $z_B = x_B + y_B i$ et $z_C = x_C + y_C i$ les affixes des points A et B et C avec $z_A \neq z_C$

- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- $\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC}$ donc si on a $\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A.

f. Application :

Soient $A(z_A = 1 + i)$; $B(z_B = -1 + i)$ et $C(z_C = 3i)$ trois points du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

2. En déduit la nature du triangle ABC.

Correction :

1. les longueurs des côtés du triangle ABC :

on a ;

- $AB = |z_B - z_A| = |-1 + i - (1 + i)| = |-2| = 2$.

- $AC = |z_C - z_A| = |3i - (1 + i)| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$.

- $CB = |z_B - z_C| = |-1 + i - (3i)| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

2. la nature du triangle ABC :

on a : $CB = AC = \sqrt{5}$ d'où : le triangle ABC est isocèle en C.

g. Propriétés du module d'un nombre complexe :

$ \bar{z} = -z = z = -\bar{z} $	$ z + z' \leq z + z' $	$ z = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$\left \frac{1}{z'} \right = \frac{1}{ z' }$; $\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$ ($z' \neq 0$)	$ z \times z' = z \times z' $	$ z^p = z ^p$, $p \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$

h. Application :

- $|1 + i| = |-1 - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $|(1 - i) \times (2 + 3i)| = |1 - i| \times |2 + 3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$.

- $\left| \frac{1 + i}{2} \right| = \frac{|1 + i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $|(1 + i)^6| = |1 + i|^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$ et $|-i + i| \leq |-i| + |i| \Leftrightarrow 0 \leq 1 + 1$.

i. Exercice :

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -5 + 3i$ et $z_2 = 4i(-2 + 3i)$ et $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_4 = 5 + i5\sqrt{3}$.

- $z_5 = \frac{7}{1 - i\sqrt{3}}$ et $z_6 = \frac{4(1 + i)}{2i(-5 - i5\sqrt{3})}$ et $z_7 = \frac{4(1 + i)^2}{2i(-5 - i5\sqrt{3})^6}$.

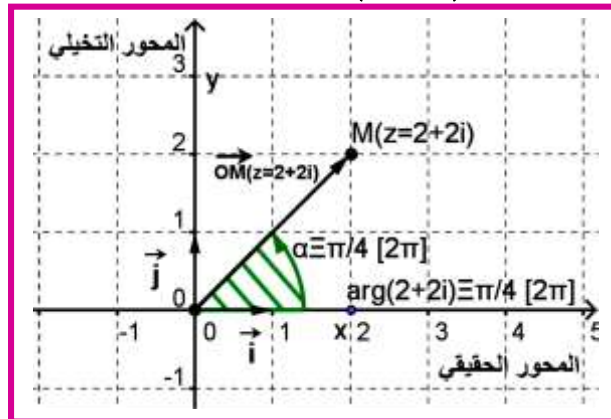


VI. Argument d'un nombre complexe non nul $z = x + yi$:

a. Activité :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. $M_{(z)}$ avec $z = 2 + 2i$

1. Construire le point M dans le plan complexe (P) .
2. Donner une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, puis toutes les mesures .



b. Vocabulaire :

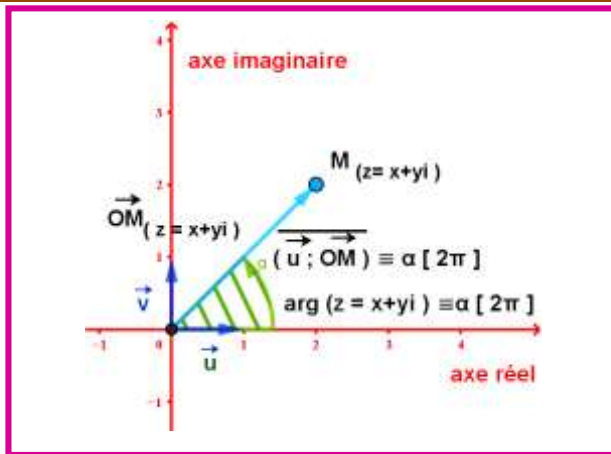
- $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, on l'appelle aussi argument du nombre complexe $z = 2 + 2i$
- Aussi toute mesure parmi les mesures $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$ de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est appelé aussi argument du nombre complexe non nul $z = 2 + 2i$.
- Argument du nombre complexe non nul $z = 2 + 2i$ est noté $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ ou $\arg(2 + 2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
- En général si $z \in \mathbb{C}^*$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha [2\pi]$ on écrit $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$ ou encore $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
- On préfère de prendre $\alpha \in]-\pi, \pi]$ (c.à.d. la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ avec $M \neq O$.
- Le nombre complexe non nul $z = 0$ n'a pas d'argument ($\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ d'où l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas déterminé) .

c. Définition :

$M_{(z)}$ ($M_{(z)} \neq O$ donc $z \neq 0$) est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Toute mesure α de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ s'appelle argument du nombre complexe non nul z .

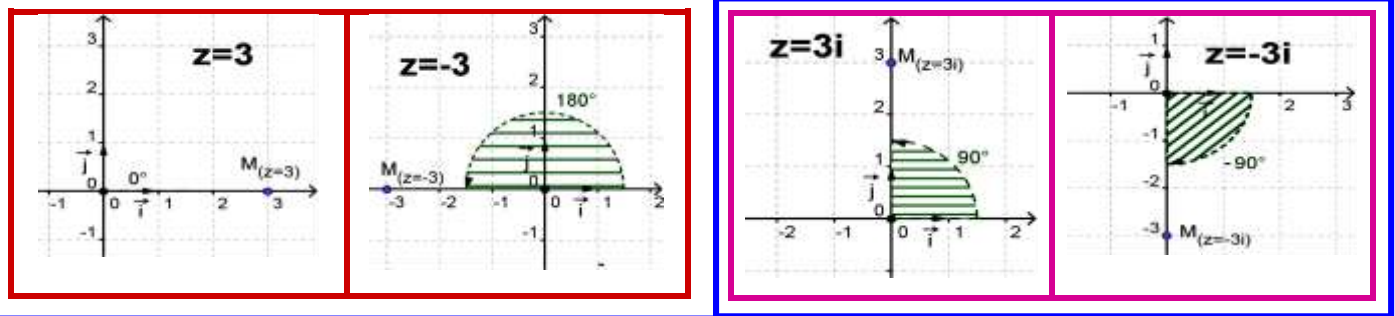
On note : $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$; d'où $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ ou $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$



d. Remarque :

- $z = a > 0$ alors $\arg(a) \equiv 0 [2\pi]$ et $z = a < 0$ alors $\arg(a) \equiv \pi [2\pi]$.
- $z = bi$; $b > 0$ alors $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $z = bi$; $b < 0$ alors $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ (sans oublier $z \neq 0$).

e. Exemples :



f. Exercice :

1. Dans le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ construire les points suivants : $M_1(z_1=2)$ et $M_2(z_2=-3)$ et $M_3(z_3=2i)$ et $M_4(z_4=-3i)$ et $M_5(z_5=1+i)$ et $M_6(z_6=1-i)$ et $M_7(z_7=2+2i)$ et $M_8(z_8=-1-i)$.

2. En déduit les arguments des affixes des points précédents.

g. Propriétés des arguments :

z et z' deux complexes non nuls	
$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$	$p \in \mathbb{Z} ; \arg(z^p) \equiv p \times \arg z [2\pi]$
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z' [2\pi]$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$
Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi]$	Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$



h. Application :

Argument des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4i(1 + i)$ et $z_3 = (1 - i)$ et $z_4 = (1 - i)(1 + i)^8$

- $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
- $\arg(4i(1 + i)) \equiv \arg(4i) + \arg(1 + i) [2\pi]$ et $\arg(1 - i) \equiv \arg(\overline{1 + i}) [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \qquad \qquad \qquad \equiv -\arg(1 + i) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \qquad \qquad \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$
- $\arg(4i(1 + i)) \equiv \arg(4i) + \arg(1 + i) [2\pi]$ et $\arg((1 - i)(1 + i)^8) \equiv \arg(1 - i) + \arg(1 + i)^8 [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \qquad \qquad \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} + 8\arg(1 + i) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \qquad \qquad \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} + 8 \times \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\qquad \qquad \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi [2\pi]$$

$$\qquad \qquad \qquad \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

VII. écriture trigonométrique (forme trigonométrique) D'un nombre complexe non nul :

a. activité :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

- On considère un nombre complexe non nul z et le point M d'affixe z (donc $M \neq O$).
- On pose $\arg(z) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM} \right) \equiv \alpha [2\pi]$.
- $(\mathcal{C})$ est le cercle trigonométrique lié au repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$ coupe la demi droite $[O, M)$ au point M_0 de coordonnées $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ donc l'affixe de M_0 est $z_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$.
- On a les points O et M_0 et M sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_0}$ ont même sens d'où $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM_0}$ avec $k > 0$ (car $M \neq O$).
- Affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est $z = x + yi$ et du vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est $z_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$.
- Puis que : $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM_0}$ avec $k > 0$ (car $M \neq O$) donc $z = kz_0 \Leftrightarrow x + yi = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ (1).
- On détermine k : on a $z = kz_0$ d'où : $|z| = |kz_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |k||z_0| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |k| = k$.
- On obtient : (2) : $k = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- D'après (1) et (2) on obtient la relation $z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

b. Vocabulaire :

L'écriture : (3) : $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ s'appelle la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul $z = x + yi$.



c. Définition et propriété :

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$ et $r = |z|$.

- Le nombre complexe non nul z s'écrit de la forme suivante : $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ou

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ ou } z = [|z|, \arg(z)] = [r, \alpha].$$

Chaque écriture précédente est appelé la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul $z = x + yi$.

d. Application :

On donne la forme (ou l'écriture) trigonométrique :

- $z_1 = 2 = 2(1 + 0i) = 2(\cos 0 + \sin 0) = [2, 0]$. $z_2 = -5 = 5(-1 + 0i) = 5(\cos \pi + \sin \pi) = [2, \pi]$.
- $z_3 = 7i = 7(0 + i) = 7\left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left[7, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $z_4 = -\frac{3}{5}i = \frac{3}{5}(0 - i) = \frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{3}{5}, -\frac{\pi}{2}\right]$.
- $z_5 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

e. Remarque :

- $z = a > 0$ alors $z = [a, 0]$, $z = a < 0$ alors $z = [-a, \pi]$.
- $z = bi$; $b > 0$ alors $\left[b, \frac{\pi}{2}\right]$, $z = bi$; $b < 0$ alors $\left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$.
- Si $z = [r, \alpha]$ alors $-z = [r, \pi + \alpha]$ et $\bar{z} = [r, -\alpha]$ et $-\bar{z} = [r, \pi - \alpha]$.

f. Application :

- exemple :** $z = 3 = [3, 0]$ et $z = -3 = [3, \pi]$. $z = 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]$ et $z = -3i = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$.
- exemple :** on a : $z = 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ alors $\bar{z} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $-z = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
- cas particulier :** $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ et $1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ et $z_3 = 1 + i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ et $z_4 = 1 - i\sqrt{3} = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$.

VIII. Operations sur les formes trigonométriques :

a. Activité :

z et z' deux complexes non nuls tel que :

$$z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ et } z' = [r', \alpha'] = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha').$$

- Le produit de $z \times z'$:

On a :



$$\begin{aligned}
 z \times z' &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') \\
 &= rr'(\cos \alpha \times \cos \alpha' + \cos \alpha \times i \sin \alpha' + i \sin \alpha \times \cos \alpha' + i \sin \alpha \times i \sin \alpha') \\
 &= rr'(\cos \alpha \times \cos \alpha' - \sin \alpha \times \sin \alpha' + i(\cos \alpha \times \sin \alpha' + \sin \alpha \times \cos \alpha')) \\
 &= rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')) \\
 &= [rr', \alpha + \alpha']
 \end{aligned}$$

b. Propriété :

z et z' deux complexes non nuls tel que :

$z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = [r', \alpha'] = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$ on a :

Les opérations	$z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z' = [r', \alpha'] = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$
Produit : $z \times z'$	$z \times z' = [r, \alpha] \times [r', \alpha'] = [r \times r', \alpha + \alpha']$ ou $zz' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$ $= rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$
Produit : $\underbrace{z \times z \times \dots \times z}_{n \text{ fois}} = z^n$ Formule de MOIVRE	$z^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha]$ $z^n = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ Cas particulier $r = 1$: $[1, \alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha]$ ou encore $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$ formule de MOIVRE
 Abraham de Moivre en 1736	Données clés 26 mai 1667 Vitry-le-François (France) 27 novembre 1754 (à 87 ans) Londres (Angleterre) Angleterre Français Mathématiques Royal Society Académie de Saumur Formule de Stirling Théorème de Moivre-Laplace - Formule de Moivre
Inverse	$\frac{1}{z'} = \frac{1}{[r', \alpha']} = [r', -\alpha']$ ou $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha') + i \sin(-\alpha'))$
Quotient	$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \alpha]}{[r', \alpha']} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right]$ ou $\frac{z}{z'} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha'))$



c. Remarque :

Si $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ alors :

- ❖ $-z = -1 \times z = [1, \pi][r, \alpha] = [r, \alpha + \pi] = r((\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)))$.
- ❖ $\bar{z} = \overline{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = [r, -\alpha]$.